MODULE 1.1 | ANALYSE : Intégration

INTRODUCTION : EXTRAITS DE L'ARRÊTÉ DU 23 JUIN 2011

Calcul intégral

Le programme se place dans le cadre de fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles de R. La diversité des programmes du lycée doit particulièrement inciter à veiller aux connaissances sur les primitives et les intégrales acquises antérieurement ou non par les étudiants.
L'accent est mis sur la diversité des approches numérique, graphique et algorithmique, lesquelles contribuent à l'appropriation du concept d'intégrale.

Intégration		
Calcul intégral : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.	• Déterminer une intégrale : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.	
Propriétés de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité et positivité.		
Calcul d'aires.	• Déterminer l'aire du domaine défini par : $\{M(x, y),\ a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\}$ où f et g sont deux fonctions telles que pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.	On étudie le cas où f (resp. g) est la fonction nulle. On familiarise les étudiants avec quelques exemples de mise en œuvre d'algorithmes liés à des méthodes élémentaires d'approximation d'une intégrale (point-milieu, trapèzes, Monte-Carlo).

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle : définition, interprétation géométrique.	• Déterminer et interpréter la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.	Cette notion est illustrée par des exemples issus des disciplines professionnelles. ⇆ Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique ; centre d'inertie, moment d'inertie.
Formule d'intégration par parties.	• Calculer une intégrale par intégration par parties.	

I. Intégrale définie d'une fonction

Définition :

On considère une fonction f qui admet une primitive F sur un intervalle [a ; b]. Le nombre F(b) – F(a) est l'intégrale définie de la fonction f entre les valeurs a et b de la variable. Les nombres a et b sont nommés bornes d'intégration. L'écriture mathématique de ce nombre est la suivante :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b}$$

Remarque :

Le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de a à b de f(x) dx ».

Méthode :

Calculer l'intégrale $\int_2^3 (3x+1)\,dx$.

Démarche à suivre :

- **Repérer la fonction f(x) dont on doit déterminer une primitive : f(x) =**
- **Déterminer une primitive de f(x) : F(x) =** $\frac{3}{2}x^2$**+x**
- **Calculer F(3) =16,5** **Calculer F(2) = 8** **Effectuer F(3) – F(2) =8,5**
- **Conclure :** $\int_2^3 (3x+1)\,dx$ **= 8,5**

Exercices :

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_{-2}^5 (2x-2)\,dx =$

$F(x) = x^2 - 2x$

$\int_0^2 (x^2 - 3x + 4)\,dx =$

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

$\int_0^5 (\frac{2}{x})\,dx =$

$F(x) = 2 \times \ln(x)$

$\int_1^3 (e^x)\,dx =$

$F(x) = e^x$

$\int_2^5 (2x^2 + 1)\,dx =$

$F(x) = x^2 + x$

$\int_0^5 (6e^{2x})\,dx =$

$F(x) = 3 \times e^{2x}$

$\int_1^3 (\frac{6x}{3x^2+1})\,dx =$

$F(x) = \ln(3x^2 + 1)$

2. Calcul d'une aire à l'aide d'une intégrale

Propriété :

Si on considère une fonction f positive et définie sur un intervalle [a ; b], l'aire A du domaine limité par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b est égale à l'intégrale définie de f sur l'intervalle [a ; b] :

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

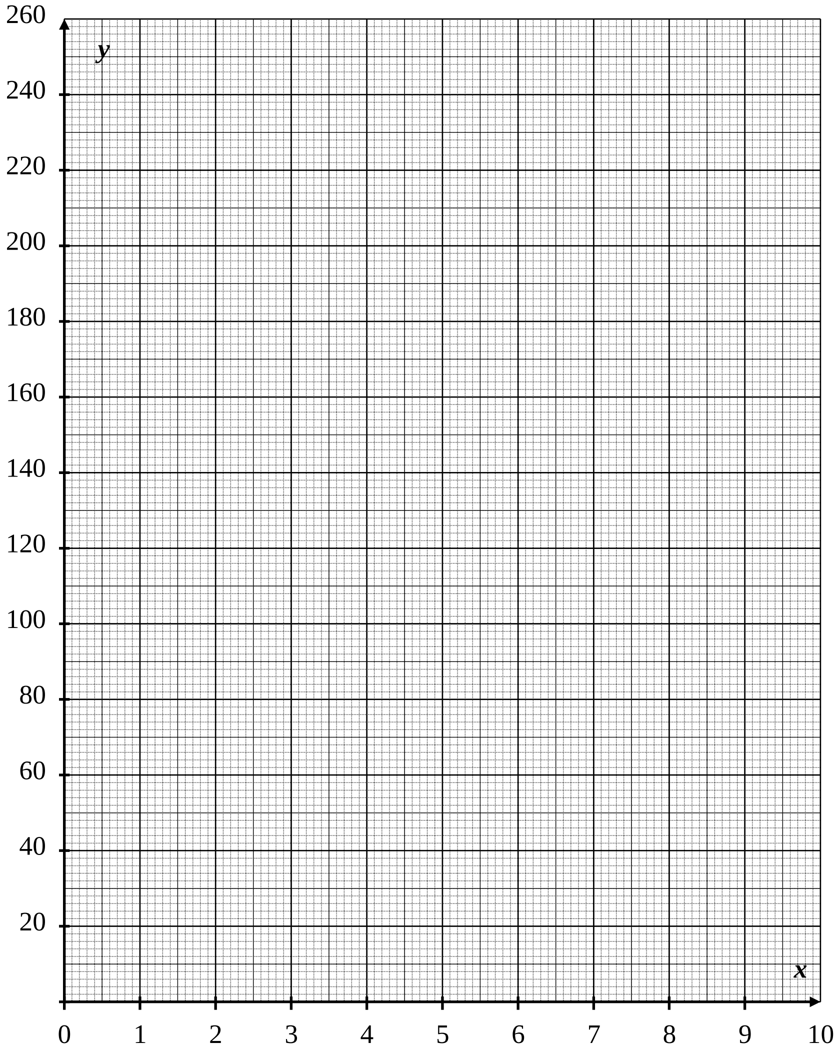
Application :

1. Remplir le tableau de valeur de la fonction $f(x) = 6x^2 - 36x + 160$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	130	112	106	112	130	160	202	256

2. Dans le repère orthogonal, tracez la courbe représentative de la fonction f définie pour x appartenant à [1 ; 8] par :

$f(x) = 6x^2 - 36x + 160$



3. Représenter d'une couleur différente l'aire délimitée par les droites d'équation x = 3, x = 6, par la courbe représentative de la fonction f et par l'axe des abscisses.

4. Déterminer l'intégrale de cette aire.

$F(x) = 2x^3 - 18x^2 + 160x$

5. Déterminer la valeur de cette aire, en intégrant cette fonction entre 3 et 6.

Calcul de F(6) et de F(3) et soustraction

3. Propriété des intégrales

Relations de Chasles :

Si f est une fonction qui admet des primitives sur un intervalle I, si a, b et c sont trois nombres de cet intervalle alors on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \quad + \quad \int_b^c f(x)dx \quad = \quad \int_a^c f(x)dx}$$

Soient f et g deux fonctions admettant des primitives sur un intervalle I, on a :

$$\boxed{\int_a^b [f(x)+g(x)]dx \quad = \quad \int_a^b f(x)dx \quad + \quad \int_a^b g(x)dx}$$

Si f est une fonction admettant des primitives sur un intervalle I et λ un réel quelconque, alors on a :

$$\boxed{\int_a^b \lambda\, f(x)dx \quad = \quad \lambda \int_a^b f(x)dx}$$

4. Intégration par parties

Propriété :

Si *u* et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées sont *u'* et *v'*, alors, quels que soient les éléments *a* et *b* de I, on a :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

<u>Exemples</u> : en utilisant l'intégration par parties, calculer :

a) I = $\int_0^1 xe^x dx$

b) J = $\int_0^2 e^x(2-x)dx$

c) K = $\int_0^3 (25-x)e^{2x-1}dx$

MODULE 1.1

ANALYSE :
Tableau des Primitives Usuelles

fonction f	primitive F	Intervalle
k (réel)	k x	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	ln (|x|)	$\mathbb{R}^*$
$e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
sin x	- cos x	$\mathbb{R}$
cos x	sin x	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	tan x	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[$
sh x	ch x	$\mathbb{R}$
ch x	sh x	$\mathbb{R}$
$1-th^2x = \frac{1}{ch^2x}$	th x	$\mathbb{R}$
$\sin x.\cos^n x$	$-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\cos x.\sin^n x$	$\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$	$\mathbb{R}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I

$u'.u^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$u'.u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	u (x) > 0
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	u (x) ≠ 0
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$	u (x) ≠ 0
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u (x) > 0
$\frac{u'}{u}$	ln u	u (x) > 0
$u' e^u$	e^u	